Доли наиболее легко интерпретировать с точки зрения рис.1.3.4. Интересный вопрос касается сравнения двух распределений дохода - действительно ли кривая Лоренца одного распределения лежит целиком "внутри" другого распределения (ближе к линии полного равенства?). Если это так, тогда мы, вероятно, должны найти серьезное доказательство того, что внутренняя кривая представляет более равное распределение. На рис. 1.3.10 снова повторим процедуру, которую мы проделали для квантилей на рис. 1.3.9: отметим долю, которая отсекает нижние 20% и нижние 80% распределения B. Найдем соответствующие точки на вертикальной оси. Теперь предположим, что мы рассматриваем кривую Лоренца A. Как мы могли ожидать, рис. 1.3.10. показывает, что люди в нижних 20% должны получить большую долю дохода на кривой A, чем на кривой B. Аналогично для нижних 80%, получавших большую долю дохода при распределении A, чем при распределении B (что аналогично тому, если мы скажем, что самые богатые 20% получили меньшую долю дохода при распределении A, чем при B). Ясно из рисунка, что мы могли бы использовать любые другие пропорции населения и получили тот же ответ: независимо от того, какая "нижняя пропорция" людей *F(y)* выбрана, эта группа получает большую долю дохода *Ф(y)* при A, чем при B (согласно ранжированию долями, A доминирует над B).

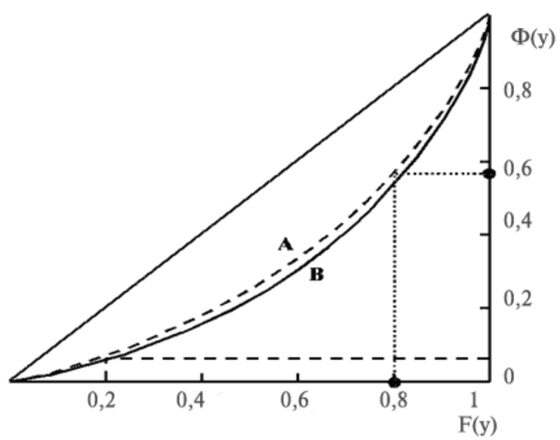

Рис. 1.3.10. Ранжирования долями

Тем не менее, довольно часто такого рода четкий результат не получается. Если кривые Лоренца пересекаются, тогда принцип ранжирования долями не может сообщить нам, является ли неравенство более высоким или более низким, возросло ли оно или уменьшилось. В этом случае надо использовать другие методы анализа, о которых говорится в главе 2.

Глава 2
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕРАВЕНСТВА

2.1. Неравенство и теория общественного благосостояния

Очевидный путь для введения социальных величин, касающихся неравенства - использование *функции общественного благосостояния* (Social welfare function (SWF)), которая просто ранжирует все возможные состояния общества в порядке (общественных) предпочтений. Различные "состояния" могут быть функциями таких величин как: персональный доход, богатство, количество машин и т.п.

В своей самой простой форме SWF просто однозначно упорядочивает социальные состояния: если состояние A предпочтительнее состояния B, тогда, и только тогда, SWF имеет наивысшую величину для состояния A, а не для B. Как мы можем создать полезную SWF? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим свойства SWF.

Пусть y_{iA} - значение "экономического положения" человека i в социальном состоянии A, где i принимает любое значение между 1 и n включительно. Например, y_{iA} могло быть доходом человека X в 2000 году.

Рассмотрим некоторые свойства функции общественного благосостояния:

1. SWF - индивидуалистическая и неуменьшающаяся. Если уровень благосостояния в любом состоянии A, обозначенный W_A, может быть записан: $W_A=W(y_{1A},y_{2A},...,y_{nA})$ и если $y_{iB} \geqslant y_{iA}$, то $W_B \geqslant W_A$, что в свою очередь означает, что состояние B является по крайней мере таким же хорошим, как состояние A.

2. Симметричность SWF подразумевает, что для любого состояния $W(y_1,y_2,...,y_n) = W(y_2,y_1,...,y_n) =...= W(y_n,y_2,...,y_1)$

3. SWF - аддитивна, что может быть записано в виде

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{n} U_i(y_i) = U_1(y_1) + U_2(y_2)+...+U_n(y_n)$$

Если все эти 3 свойства выполняются, тогда SWF может быть представлена как:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \sum_{i=1}^{n} U\ (y_i) = U\ (y_1) + U\ (y_2) + ... + U\ (y_n)\ ,$$

где U - одна и та же функция для каждого человека и где $U(y_i)$ возрастает с y_i. Если мы ограничимся этим специальным случаем, определения остальных двух свойств SWF могут быть упрощены, поскольку они могут выражаться в терминах только функции U. Назовем $U(y_1)$ *общественной полезностью*, или индексом благосостояния, для человека 1. Уровень, на который этот индекс возрастает,

$$U\ '(\ y_1\ )\ =\ \frac{dU\ (\ y_1\ )}{dy_{\ 1}}\ , \qquad 2.1.1)$$

может быть определен как *общественная предельная полезность*, или вес благосостояния для человека 1. Заметим, что из-за первого свойства ни один из весов благосостояния не может быть отрицательным. Тогда четвертое и пятое свойства SWF такие:

4. SWF - строго вогнута, если вес благосостояния всегда уменьшается при увеличение y_i.

5. SWF - имеет *постоянную эластичность*, или *постоянное относительное отвращение (неприятие) неравенства, если $U(y_i)$* может быть записана в виде

$$U\ (\ y_i\ )\ =\ \frac{y_i^{1-\varepsilon}\ -\ 1}{1\ -\ \varepsilon} \qquad (2.1.1)$$

где ε - параметр отвращения (неприятия) неравенства, который является неотрицательным.

Отметим, что это очень краткое обсуждение свойств SWF. Тем не менее, эти пять основных особенностей (или предположений об SWF) - достаточны для того, чтобы получить удобную меру неравенства.

Индекс благосостояния U для пяти постоянно-эластичных функций общественного благосостояния проиллюстрирован на рис. 2.1.1. Случай $\varepsilon = 0$ иллюстрирует вогнутую, но не строго, SWF; все другие кривые на рисунке представляют строго вогнутые SWF. С ростом функция общественной полезности U становится более остро искривленной. Для $\varepsilon < 1$ SWF ограничена снизу, но не ограничена сверху. И, наоборот, для $\varepsilon > 1$ SWF ограничена сверху, но не ограничена снизу.

При $\varepsilon = 2$ мы видим, что никто не имеет индекс благосостояния ниже, чем -2. Обратим внимание, что вертикальная шкала в этой диаграмме довольно произвольная. Мы могли бы умножить величины U на любое положительное число и добавить (или вычесть) любую константу к U, не изменяя их характеристик как индексов благосостояния.

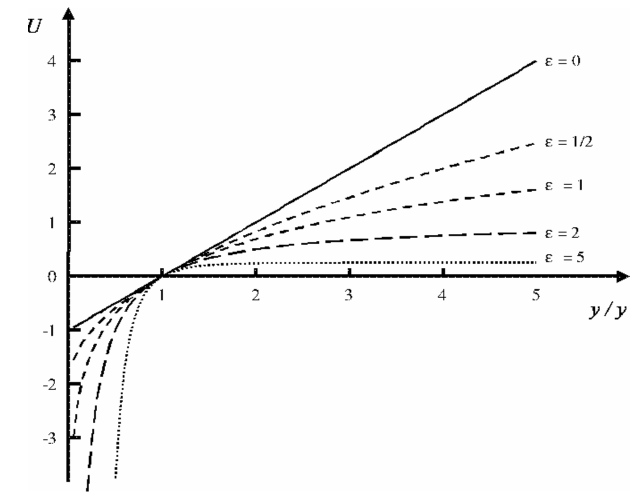

Рис. 2.1.1. Общественная полезность и относительный доход

Теорема 1. Если общественное состояние A доминирует над состоянием B согласно их ранжированию квантилями, то $W_A > W_B$ для любой индивидуалистической, аддитивной и симметричной функции общественного благосостояния W.

То есть, если Парад распределения A лежит выше Парада распределения B, то общественное благосостояние должно быть выше для этого класса функций SWF. Фактически этот результат является более мощным, чем он кажется сначала. Сравним распределение A = (5,3,6) с распределением B = (2,4,6): при перемещении из B в A человек 1 несомненно получает выгоду, но человек 2 находится в худшем положении. Поскольку предположение симметрии означает, что A эквивалентно A' = (3,5,6), и тогда несомненно высшее благосостояние достигается в A', а не в B.

Если ввести ограничение, что SWF вогнута, тогда в дальнейшем может быть установлен очень важный результат:

Теорема 2. Пусть общественное состояние A имеет распределение дохода $(y_{1A}, y_{2A}, ..., y_{nA})$, и общественное состояние B имеет распределение дохода $(y_{1B}, y_{2B}, ..., y_{nB})$, где общий доход в состоянии A и в состоянии В - одинаковый. Тогда кривая Лоренца для состояния А лежит целиком внутри кривой Лоренца для состояния В тогда и только тогда, когда $W_B > W_A$ для любой индивидуалистической, возрастающей, симметричной и строго вогнутой функции общественного благосостояния W.

Теперь введем в рассмотрение, так называемую, обобщенную кривую Лоренца (Generalised Lorenz Curve), умножив вертикальную координату кривой Лоренца на средний доход.

Теорема 3. Обобщенная кривая Лоренца для состояния А лежит целиком выше обобщенной кривой Лоренца для состояния В тогда и только тогда, когда $W_A > W_B$ для любой индивидуалистической, аддитивно возрастающей, симметричной и строго вогнутой функции общественного благосостояния W.

Тем не менее, хотя теоремы 1-3 обеспечивают некоторое фундаментальное понимание благосостояния и ранжирования неравенства, они имеют ограничения.

Во-первых, результаты справедливы исключительно в пределах контекста анализа общественного благосостояния. Во-вторых, трех теорем недостаточно для измерения неравенства на практике. Кривые Лоренца, часто пересекаются; то же происходит с диаграммами Парада и обобщенными кривыми Лоренца. Кроме того, часто необходимо получить уникальное цифровое значение для неравенства.

Рассмотрим меры неравенства, основанные на функции общественного благосостояния.

Индекс неравенства Далтона (Dalton, 1920) [3]:

$$D_\varepsilon = \frac{\overline{U}}{U(\overline{y})} \tag{2.1.3}$$

или

$$D_\varepsilon = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i^{1-\varepsilon} - 1\right]}{\overline{y}^{1-\varepsilon} - 1} \tag{2.1.4}$$

Индекс равен нулю для равно распределенных доходов (где мы имеем $\overline{U} = U(\overline{y})$.

А.Аткинсон (Atkinson, 1970) [8] критически отнесся к использованию D_ε на основе того, что этот индекс чувствителен к уровню, от которого была измерена общественная полезность: если добавить неравную нулю константу ко всем U, то D_ε изменится. Это не изменяет

порядковые свойства D_ε, но меры неравенства, полученные добавлением различных произвольных констант к U, не будут кардинально эквивалентными. Аткинсон ввел понятие эквивалентного дохода y_ε, т. е. такого дохода, который при равномерном распределении позволил бы обществу достичь того же уровня благосостояния, что и при существующем распределении доходов. Обязательно $y_\varepsilon \leqslant \overline{y}$ - тогда мы можем иметь возможность отбросить некоторый национальный доход прочь, перераспределить остальной одинаково и останемся с тем же уровнем общественного благосостояния.

Индекс неравенства Аткинсона определяется как:

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{y_\varepsilon}{\overline{y}} \tag{2.1.5}$$

или

$$A_\varepsilon = 1 - \frac{1}{\overline{y}} U^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(y_i)\right) = 1 - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i}{\overline{y}}\right]^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \tag{2.1.6}$$

Снова, как для индекса D_ε, мы находим разные значения A_ε для разных значений отвращения (неприятия) неравенства.

2.2. Неравенство и теория информации

Полезные и разумные меры неравенства могут быть построены по аналогии с теорией информации. В теории информации имеют дело с проблемой "оценивания" информации о том, что произошло определенное событие из большого числа возможностей.

Предположим, что есть события, перечисленные 1,2,3,..., которым соответствуют вероятности p_1, p_2, p_3... Каждая p_i не менее 0 (который представляет общую невозможность события) и не больше, чем 1 (которая представляет абсолютную достоверность события). Предположим, что произошло событие 1. Как определить значение $h(p_1)$ этой информации?

Если событие 1 рассматривается как очень вероятное при любом исходе (p_1 близко к 1), тогда эта информация не особо привлекательна, и, поэтому, пусть $h(p_1)$ будет небольшим. Но если событие 1 было близко к невозможности, то эта информация для нас ценна, она получает высокое $h(p_1)$. Следовательно, величина $h(p_1)$ должна уменьшаться при увеличении p_1. Дальнейшее свойство, которым должна обладать $h(.)$ (в контексте вероятностного анализа) заключается в следующем. Если событие 1 и событие 2 статистически независимые (так, что вероятность того, что произошло событие 1 не зависит от того, произошло событие 2 или нет, и наоборот), тогда вероятность того, что произошли оба события 1 и 2 вместе - $p_1 p_2$. Так, если мы хотим иметь возможность суммировать информационные значения сообщений, касающихся независимых событий, функция h должна иметь особое свойство

$$h(p_1 p_2)=h(p_1)+h(p_2)$$

И единственная функция, которая удовлетворяет этому для всех действующих p-значений, - это

$$h = -\log(p). \quad (2.2.1)$$

Однако очень неудобно работать с набором из n чисел - вероятностей, имеющих отношение к каждому из n возможных состояний. Удобнее агрегировать их в единственное число, которое описывает "степень беспорядка" системы. Это число будет наименьшим, когда вероятность равна 1 для одного конкретного события i и равна 0 для каждого другого события: тогда система - полностью упорядочена и информация о том, что событие i произошло, не имеет значения, пока другие события невозможны; общий объем информации системы равен нулю. Более в общем смысле мы можем охарактеризовать "степень беспорядка" - известную как энтропия - рассматривая средний объем информации системы. Это взвешенная сумма всех значений информации для различных событий. Вес, данный событию i - это просто его вероятность p_i.

Другими словами мы имеем:

$$\text{энтропия} = H(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i h(p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i) \quad (2.2.2)$$

Х.Тейл (Theil, 1967) [9] предположил, что понятие энтропии дает аппарат для измерения неравенства. Все, что надо сделать - переинтерпретировать n возможных событий как n людей и p_i как долю, которую имеет человек i в общем доходе, s_i:

$$s_i = \frac{y_i}{n\bar{y}}$$ где y_i - доход человека i, и при этом $$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1$$

Затем, вычитая фактическую энтропию распределения дохода (просто заменим все p_i на s_i в формуле энтропии) из возможной максимальной величины этой энтропии (когда каждое $s_i=1/n$, т.е. все получают одинаковую долю дохода), находим "претендента на должность" меры неравенства - ***индекс энтропии Тейла***:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} h\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n} s_i h(s_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} s_i \left[h\left(\frac{1}{n}\right) - h(s_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} s_i \left[\log(s_i) - \log\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\bar{y}} \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Каждое из этих четырех выражений - эквивалентные способы записи меры Т.

Для того чтобы более подробно рассмотреть смысл меры Т, рассмотрим, что произойдет с Т, если доля бедного человека (1) повышается за счет богатого человека (2). То есть пусть доля человека (1) возрастет с s_1 до $s_1 + \Delta s$, а доля человека (2) уменьшается с s_2 до $s_2 - \Delta s$. Тогда, помня, что $h(s)=-\log(s)$, находим изменение Т:

$$\Delta T = \Delta s\left[h(s_2) - h(s_1)\right] = -\Delta s \log\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

Итак, передача Δs приведет к отрицательному ΔТ, так, что индекс неравенства уменьшается. Однако можно сказать немного больше. Видно, что размер уменьшения Т зависит только от отношения s_2 и s_1.

Таким образом, например, небольшая передача от человека с долей дохода в 2 миллионных человеку с только 1 миллионной долей оказывает тот же эффект на меру неравенства Т, как идентичная передача от человека с 8 миллионной долей к кому-то с 4 миллионной.

Легко можно увидеть, что доли дохода (s_i) служат в качестве аналогов вероятностей событий (p_i). И теперь можно проинтерпретировать "общественный аналог" функции информации h. Как видно из формулы для Т, можно теперь говорить, при каких обстоятельствах s_3 и s_4 являются такими же "расстояниями отдаленности" как s_2 и s_1. Это происходит если

$$h(s_1) - h(s_2) = h(s_3) - h(s_4)$$

т.е. небольшая передача от s_2 к s_1 имеет точно такой же эффект на неравенство, как небольшая передача от s_4 к s_3.

Функция $h(s)$=-log(s) может рассматриваться, как член значительно более широкого класса функций, проиллюстрированных на рис. 2.2.1. На нем изображены члены семейства кривых, задаваемых формулой

$$h(s) = \frac{1 - s^{\beta}}{\beta} \qquad (2.2.4)$$

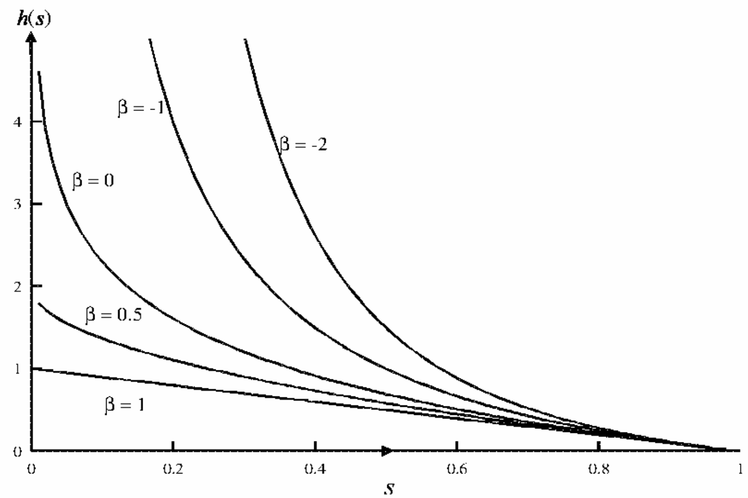

Рис. 2.2.1. Множество представлений расстояния

Для любого значения β, конкретная мера неравенства может быть записана любым из следующих эквивалентных способов:

$$\frac{1}{1+\beta}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}h\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n}s_i h(s_i)\right]$$

$$\frac{1}{1+\beta}\sum_{i=1}^{n}s_i\left[h\left(\frac{1}{n}\right) - s_i\right] \qquad (2.2.5)$$

$$\frac{1}{\beta+\beta^2}\sum_{i=1}^{n}s_i\left[s_i^{\beta} - n^{-\beta}\right]$$

Эффект небольшой передачи s от богатого человека (2) бедному человеку (1) теперь имеет вид

$$-\frac{1}{\beta}\left[s_2^{\beta} - s_1^{\beta}\right]\Delta s = \left[h(s_2) - h(s_1)\right]\Delta s$$

Получаем тот же эффект, передавая s от богатого человека (4) бедному человеку (3), тогда и только тогда, когда "расстояние" $h(s_4)$-$h(s_3)$ - такое же, как "расстояние" $h(s_2)$-$h(s_1)$.

Специальный случай, когда $\beta = 0$, просто дает меру T. Как отмечалось, это подразумевает относительное понятие расстояния: 1 и 2 так же удалены как 3 и 4, если отношения s_1/s_2 и s_3/s_4 равны. Другой интересный специальный случай обнаруживается при $\beta = 1$. Тогда мы получаем следующую информационно-теоретическую меру:

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}s_i^2 - \frac{1}{n}\right] \qquad (2.2.6)$$

Индекс Герфиндаля (Herfindahl, 1950) [10]:

$$H = \sum_{i=1}^{n}s_i^2 \qquad (2.2.7)$$

Это сумма квадратов долей дохода. Так, сравнивая эти два выражения, мы видим, что для данного населения, H кардинально эквивалентно информационно-теоретической мере со значением $\beta = 1$; и в этом случае у нас есть очень простая абсолютная мера расстояния

$$h(s_1)\text{-}h(s_2)=s_1\text{-}s_2$$

Таким образом, расстояние между человеком с 1% долей и другим с 2% долей будет тем же, что и расстояние между человеком с 4% долей и другим с 5% долей.

Следовательно, выбирая соответствующую "функцию расстояния", мы определяем конкретную "информационно-теоретическую" меру неравенства. Каждое понятие расстояния дает другой вес в промежутках между долями дохода в других частях распределения дохода.

Для того чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим пример.

Верхняя часть табл. 2.2.1 представляет доход для бедного человека P, богатого Q и очень богатого R и их соответствующие доли в общем доходе (который составляет 1 000 000 рублей); нижняя часть демонстрирует неявное расстояние из P к Q и неявное расстояние из Q к R для трех специальных значений β , которые мы обсудили подробно.

Мы можем увидеть, что для β =-1 промежуток (P,Q) больше чем промежуток (Q,R); для β =1 верно обратное; и для β =0, два промежутка эквивалентны.

Таблица 2.2.1.

Пример различных представлений расстояния

	Доход, руб.		Доля,%
Человек P	2 000		0,2
Человек Q	10 000		1
Человек R	50 000		5
Все	1 000 000		100
β	$h(s_i)$-$h(s_j)$	**Расстояние (P,Q)**	**Расстояние (Q,R)**
-1	$\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_j}$	400	80
0	$\log\left(\frac{s_i}{s_j}\right)$	5	5
1	$s_j - s_i$	0,008	0,04

2.3. Построение мер неравенства. Аксиоматический подход

Рассмотрим аксиомы, которым должны удовлетворять меры неравенства.

1. Слабый принцип перераспределения Пигу-Далтона (Pigou-Dalton Transfer Principle)

Эта аксиома говорит о повышении меры неравенства (или, по крайней мере, неуменьшении) в результате перераспределения дохода от более бедного человека к более богатому, и уменьшении неравенства (или, по крайней мере, неувеличении) при перераспределении дохода от богатого человека к более бедному.

Рассмотрим вектор y', который является преобразованием вектора y, полученного передачей δ от y_j к y_i, где $y_i>y_j$ и $y_i+\delta>y_j+\delta$. Принцип перераспределения удовлетворен, когда $I(y')\geqslant I(y)$, где I - мера неравенства.

Теорема 4. Пусть распределение дохода в социальном состоянии А может быть достигнуто простым перераспределением дохода из социального состояния В (так что общий доход остается неизменным в обоих случаях), и кривая Лоренца для А лежит полностью во внутренней части В. Тогда, пока мера неравенства удовлетворяет слабому

принципу перераспределения, мера неравенства для состояния А будет строго ниже уровня неравенства для состояния В.

Эта теорема подчеркивает важность этого принципа для выбора меры неравенства. Вариация, коэффициент вариации, коэффициент Джини, индексы Тейла и Герфиндаля, индексы Аткинсона и Далтона ($\varepsilon>0$) удовлетворяют этому принципу.

2. Независимость шкалы дохода

Эта аксиома говорит о том, что мера неравенства инвариантна к однородным пропорциональным изменениям: если каждый личный доход изменяется в одной и той же пропорции (как случается при изменении курса валютной единицы), тогда неравенство остается неизменным. То есть, для любого скалярного $\lambda>0$, $I(y)=I(\lambda y)$.

Этим свойством обладают все меры неравенства, которые мы рассматривали, за исключением вариации (так как $\mathrm{var}(\lambda y)=\lambda^2\mathrm{var}(y)$) и класса мер Далтона.

3. Принцип населения

Принцип населения говорит о том, что мера неравенства инвариантна к репродукции населения: слияние двух идентичных распределений не должно изменять неравенство. То есть, для любого скалярного $\lambda>0$, $I(y)=I(y[\lambda])$, где $y[\lambda]$ - соединение (сцепление) вектора y λ раз.

Фактически почти все меры неравенства, которые мы рассматривали, удовлетворяют принципу населения. Исключение составляют модифицированные информационно-теоретические индексы: если $\beta = 0$ (индекс Тейла), принцип населения удовлетворяется, но в противном случае с ростом населения мера будет или возрастать (при $\beta < 0$), или убывать (при $\beta > 0$, включая индекс Герфиндаля). Однако можно немного адаптировать этот класс мер, так что принцип населения всегда удовлетворяется.

4. Разложимость

Эта аксиома говорит о том, что неравенство связано последовательно с составными частями распределения, такими как, например, подгруппы населения. Например, если неравенство заметно повысилось среди каждой подгруппы населения, тогда надо ожидать повышение общего неравенства.

Теорема 5. Любая мера неравенства, которая одновременно удовлетворяет свойствам слабого принципа перераспределения, разложимости, независимости шкалы и принципу населения, может быть представлена в виде

$$I_\theta = \frac{1}{\theta^2 - \theta}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^\theta - 1\right] \qquad (2.4.1)$$

где n - количество индивидов в выборке, y_i - доход индивида i, $i \in (1, 2,...,n)$, параметр θ может принимать любое значение: положительное, ноль или отрицательное, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ - средний доход.

Класс мер, определяемых этой формулой, называется **обобщенным классом мер энтропии.** Сравнение этой формулы с формулой для модифицированной информационно-теоретической меры показывает, что они близко родственны. Фактически, обобщенный класс мер энтропии как раз и является семейством модифицированных информационно-теоретических мер, нормализованных так, что они удовлетворяют принципу населения и имеют параметр θ равным β-1. Значения I_θ изменяются от 0 до ∞, при этом нуль представляет равное распределение (все доходы одинаковы), а высшие значения - высшие уровни неравенства. Параметр θ представляет вес, данный расстояниям между доходами в различных частях распределения дохода, и может принимать любую реальную величину. Для малых значений θ мера I_θ более чувствительна к изменениям в более низком хвосте распределения, а для больших значений θ - I_θ более чувствительна к изменениям в верхнем хвосте.

Наиболее часто используются значения θ = 0, 1 и 2. Меры I_θ с параметрами 0 и 1 превращаются, по правилу Лопиталя, в одну из двух мер неравенства Тейла, среднее логарифмическое отклонение и индекс Тейла, соответственно:

$$I_0 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \log \frac{\bar{y}}{y_i}\right] \tag{2.4.2}$$

$$I_1 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\bar{y}} \log \frac{y_i}{\bar{y}}\right] \tag{2.4.3}$$

С θ=2 мера I_θ представляет $^1/_2$ квадрата коэффициент вариации CV:

$$CV = \frac{1}{\bar{y}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2\right]^{1/2} \tag{2.4.4}$$

При θ =1-ε I_θ становится порядково-эквивалентна мерам, основанным на функции благосостояния A_ε и D_ε для величин θ<1.

5. Строгий принцип перераспределения

Вспомним понятие "расстояния" между долями дохода населения, чтобы усилить принцип перераспределения. Рассмотрим меру расстояния, заданную как

$$d=h(s_1)-h(s_2),$$

где s_2>s_1, и $h(s)$ одна из кривых на рис. 2.2.1. Затем рассмотрим перераспределение от богатого человека (2) к бедному человеку (1). Мера неравенства удовлетворяет принципу перераспределения в строгом смысле, если величина, на которую уменьшилось неравенство, зависит только от расстояния d и не зависит от выбора индивида.

Для семейства h-функций, проиллюстрированного на рис. 2.2.1, меры неравенства, которые удовлетворяют строгому принципу перераспределения, принадлежат семейству, описанному формулами для модифицированного информационно-теоретического семейства (индекс Тейла и индекс Герфиндаля являются частными случаями) или семейства мер обобщенной энтропии. Каждая величина β, так же как и каждая величина θ, определяет различные понятия (концепции) расстояния, и таким образом, различные соответствующие меры неравенства, удовлетворяющие строгому принципу перераспределения.

Добавление строгого принципа перераспределения к другим принципам означает, что Теорема 5 может быть немного усилена: если все пять, перечисленных выше свойств, должны быть удовлетворены, тогда единственные меры, которые позволяют это сделать, - это индексы обобщенной энтропии I_θ.

2.4. Структура неравенства. Техника декомпозиции

Дискуссия об основных свойствах распределительного анализа включает разложимость как одно из основных свойств, которое может рассматриваться в формальном подходе к распределению дохода.

Разложимость желательна как в силу арифметических, так и аналитических причин. Экономисты и политические аналитики могут пожелать оценить вклад в общее неравенство неравенства между разными подгруппами населения, например, внутри и между группами рабочих в сельскохозяйственных и промышленных секторах, или городской и сельской местности. Декомпозиция мер неравенства может пролить свет, как на структуру, так и динамику неравенства.

Существуют два типа декомпозиции:

1. Декомпозиция по подгруппам населения. Подразумевается, что индивиды различаются в соответствии с их персональными или групповыми характеристиками, что служит разбиению населения на отдельные под-

группы. Это может быть полезным для анализа взаимоотношений между неравенством во всей стране и неравенством внутри и между регионами, или неравенством внутри и между подгруппами, классифицированными в соответствии с некими признаками - по полу, уровню образования и т.п.

2. Декомпозиция по источнику дохода, позволяющая оценить вклад различных источников дохода (заработной платы, трансфертов и т.д.) в общее неравенство.

2.4.1. Декомпозиция по подгруппам населения

Цель этой декомпозиции - разделить общее неравенство в распределении доходов на неравенство между выбранными подгруппами (I_b), и внутригрупповое неравенство (I_w).

Население разбивается на K непересекающихся подгрупп $G_1,...,G_K$, где подгруппа k состоит из N_k ($\geqslant 1$) индивидов. Все население состоит из N индивидов и поскольку подгруппы являются непересекающимся

$$N = \sum_{k=1}^{K} N_k$$

Средний доход подгруппы k

$$\bar{y}_k = \frac{\sum_{j \in G_k} y_j}{N_k} \quad ,$$

где y_j - индивидуальный j-ый доход

А.Шоррокс (Shorrocks, 1984) [11] показал, что условие для аддитивной разложимости может быть выражено в виде суммы внутригруппового неравенства I_w и межгруппового неравенства I_b

$$I(y) = I(y_1, y_2, ..., y_k) = I_w + I_b = \sum_{k=1}^{K} w_k I(y_k) + B \quad , \qquad (2.4.1)$$

где $y_1,..., y_K$ представляет любое разбиение распределения y на K подгрупп, коэффициенты декомпозиции w_k и межгрупповая часть B, зависят только от $\bar{y}$ и N, $\bar{y} = (\bar{y}_1,.., \bar{y}_K)$, $N = (N_1,.., N_K)$. B предполагается независимой от неравенства внутри индивидуальных подгрупп.

Как доказал А.Шоррокс (1980) [12], меры неравенства, относящиеся к обобщенному классу мер энтропии, легко разлагаются на составные части по подгруппам населения:

$$I_c(y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} \right)^c I_{c,k} + \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \frac{1}{c^2 - c} \left(\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} \right)^c - 1 \right), \qquad (2.4.2)$$

где $I_{c,k}$ - мера энтропии для $c \neq 0$ и $c \neq 1$ в подгруппе k.

$$I_0(y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} I_{0,k} + \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \log \frac{\bar{y}}{\bar{y}_k} \qquad (2.4.3)$$

где: $I_{0,k}$ - мера энтропии для c=0 в подгруппе k.

$$I_1(y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} I_{1,k} + \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} \log \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} \qquad (2.4.4)$$

где $I_{1,k}$ - мера энтропии для c=1 в подгруппе k.

Коэффициенты декомпозиции для этих индексов

$$w_k = \frac{N_k}{N} \left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{y}} \right)^c \qquad (2.4.5$$

$\sum_k w_k = 1$ только когда c=0 или c=1. Таким образом, итоговый внутригрупповой вклад в неравенство $\Sigma w_k I(y_k)$ не будет являться средним взвешенным значением $I(y_k)$.

Х.Тейл (1967) [9] отметил серьезный вывод из этого факта. Можно показать, что Σw_k пропорционально B. Таким образом, за исключением двух мер, предложенных Тейлом (при $c = 0$ и $c = 1$), коэффициенты декомпозиции w_k не являются независимыми от межгруппового вклада.

Только когда w_k независимо от $\bar{y}_k$, общее неравенство может однозначно разделяться во вклад из-за различий между подгруппами

$$I_b = B = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} N_k \log \frac{\bar{y}}{\bar{y}_k} \qquad (2.4.6)$$

и вклад из-за неравенства в пределах каждой подгруппы k=1.....K,

$$w_k I(y_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_k} \log \left(\frac{\bar{y}}{y_j^k} \right) \qquad (2.4.7)$$

таким способом, что общее неравенство является суммой этих K+1 вкладов.

Ф.Ковел и С.Дженкинс (Cowell & Jenkins, 1995) [13] предложили наглядную итоговую меру R_b величины неравенства, объясненного различиями между подгруппами

$$R_b=I_b/I. \tag{2.4.8}$$

Следовательно, можно заключить, что *x*% общего неравенства объясняется межгрупповым неравенством, и (100-*x*)% объясняется неравенством внутри групп.

2.4.2. Декомпозиция по источникам дохода

Декомпозиция по источнику дохода, предложенная А.Шорроксом (1982) [14, 15], дезагрегирует доход индивидов или домохозяйств на различные компоненты, как, например, заработная плата, трансферты и т.п., и рассматривает оценку вкладов этих источников в общее неравенство дохода.

Одними из первых эту проблему исследовали В.Рао (Rao, 1969) [16], Д.Фай и коллеги (Fie et al., 1978) [17], а также Г.Филдз (Fields, 1980) [18], А.Дитон (Deaton, 1997) [19], С.Дженкинс (Jenkins, 1995) [20].

Пусть Y_i^k - доход индивида *i* (i=1,...,*N*) из источника *k* (k=1,...,*K*) и пусть $Y = (Y_1,...,Y_N)= \Sigma_k Y^k$ представляет общее распределение доходов.

При этом, абсолютный вклад источника *k* в общее неравенство - $S_k(Y^1,...,Y^k; K)$.

Пусть выполняются следующие предположения:

1) $I(Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $Y = \bar{y}\, e$, где $e = (1,1,...,1)$.

2.1) Непрерывность: $S_k(Y^1,...,Y^k; K)$ непрерывно в Y^k.

2.2) Симметричное обращение источников дохода: не имеет никакого значения, как они пронумерованы

$S_k(Y^1,...,Y^k; K) = S_{\Pi k}(Y^{\Pi 1},...,Y^{\Pi k}; K)$,

где $\Pi_1,..., \Pi_K$ - любая перестановка 1,...,*K*.

3) Независимость от уровня дисагрегации:

$S_1(Y^1,...,Y^k; K) = S_1(Y^1, Y\text{-}Y^1; 2)= S(Y^1, Y)$

(в противном случае вклад трансфертов мог бы измениться, если бы они были представлены как пенсии, оплата нетрудоспособности, оплата безработицы, и так далее); с учетом предположения 2.2, мы имеем

$S_k(Y^1,...,Y; K)= S(Y^k, Y)$.

4) Аддитивная последовательность:

$$\sum_{k=1}^{K} S_k(Y^1,\dots,Y^k;K) = \sum_{k=1}^{K} S(Y^k,Y) = I(Y) \quad .$$

А.Шоррокс доказал, что если выполняются эти предположения, то

$$S(Y^k,Y) = a(Y)Y^k = \sum_{i=1}^{N} a_i(Y)y_i^k \tag{2.4.9}$$

и

$$I(Y) = a(Y)Y = \sum_{i=1}^{N} a_i(Y)y_i \tag{2.4.10}$$

Пропорциональный вклад источника *k*, когда неравенство измеряется с помощью меры *I*:

$$s_k = \frac{S_k}{I(Y)} = \frac{a(Y)Y^k}{a(Y)Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i(Y)y_i^k}{\sum_{i=1}^{N} a_i(Y)y_i} \quad . \tag{2.4.11}$$

Формула (2.4.9) представляет "естественное" правило декомпозиции.

Рассмотрим возможность применения этого правила к различным индексам.

Для индекса Джини

$$a_i(Y) = 2\left(i - \frac{N+1}{2}\right) / N^2\bar{y} \quad ,$$

если доходы упорядочены следующим образом $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant ... \leqslant Y_N$

Из (2.4.9) и последнего соотношения мы получаем

$$S(Y^k,Y) = \frac{2}{N^2\bar{y}}\sum_{i=1}^{N}\left(i - \frac{N+1}{2}\right)y_i^k = \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}}\bar{G}(Y^k),$$

где $\bar{y}_k$ - средний доход из источника дохода *k*.

Можно записать индекс Джини как

$$G(Y) = \sum_{k=1}^{K} S(Y^k,Y) = \sum_{k=1}^{K}\frac{\bar{y}_k}{\bar{y}}\bar{G}(Y^k),$$

где $\bar{G}$ - псевдо-Джини коэффициент

$$\bar{G}(Y^k) = \frac{2}{n^2 y_k}\sum_i \left(i - \frac{n+1}{2}\right)Y_i^k$$

Пропорциональный вклад источника дохода k, когда неравенство измеряется индексом Джини:

$$s_k(G) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(i - \frac{N+1}{2}\right) y_i^k}{\sum_{i=1}^{N}\left(i - \frac{N+1}{2}\right) y_i} \tag{2.4.11}$$

Декомпозиция коэффициента Тейла предполагает использование весов

$$a_i(Y) = \frac{1}{N \cdot \bar{y}} \log \frac{y_i}{\bar{y}}$$

$$S(Y^k, Y) = \frac{1}{N \cdot \bar{y}} \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) y_i^k$$

Индекс Тейла может быть записан в виде

$$I_1(Y) = \sum_{k=1}^{K} S(Y^k, Y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{N \cdot \bar{y}} \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) y_i^k$$

Пропорциональный вклад источника k, когда неравенство измеряется с помощью $I_1(Y)$

$$s_k(I_1) = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^k \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)}{\sum_{i=1}^{N} y_i \log\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)} \tag{2.4.12}$$

Для индекса $I_0(Y)$

$$I_0(Y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{N} \sum \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right) \frac{1}{y_i} y_i^k$$

$$s_k(I_0) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^k}{y_i} \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right)} \tag{2.4.13}$$

Для индекса $I_c(Y)$

$$I_c(Y) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{Nc(c-1)} \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^c - 1\right] \cdot \frac{1}{y_i} y_i^k$$

$$s_k(I_c) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i^k}{y_i} \left[\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^c - 1\right]}{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^c - 1\right]} \tag{2.4.14}$$

Заметим, что (2.4.9) не определяет коэффициенты $a_i(Y)$ однозначно. Коэффициентов, которые удовлетворяют предположению (2.4.9), бесконечное множество. Как показал А.Шоррокс (1982), существует бесконечное число декомпозиций по источникам дохода. Он предложил два условия, которые подразумевают однозначную декомпозицию:

5) Симметрия населения: если P - любая матрица перестановки размером $N*N$, $S(Y^kP, YP) = S(Y^k, Y)$.

6) Двухфакторная симметрия: если P - любая матрица перестановки, $S(Y^1, Y^1 + Y^1P) = S(Y^1P, Y^1 + Y^1P)$.

Тогда вклад любого источника в общее неравенство доходов можно рассчитать как:

$$s_k(I) = \frac{S(Y^k, Y)}{I(Y)} = \frac{\operatorname{cov}(Y^k, Y)}{\sigma^2(Y)} \tag{2.4.15}$$

для всех $Y \neq \bar{y}e$.

При этом декомпозиция по источнику дохода не зависит от выбранной меры неравенства.

Изменение неравенства между двумя периодами можно представить как:

$$\Delta I = \sum_{k=1}^{K} \Delta S_k \quad . \tag{2.4.16}$$

Тогда

$$\%\Delta I = \frac{\Delta I}{I} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\Delta S_k}{I} = \sum_{k=1}^{K} s_k \frac{\Delta S_k}{S_k} = \sum_{k=1}^{K} s_k (\%\Delta S_k) \tag{2.4.17}$$

и вклад источника k в изменение общего неравенства тем больше, чем больше $s_k(\%\ \Delta S_k)$.

2.5. Моделирование неравенства

Логнормальное распределение

Вначале рассмотрим, что такое нормальное или Гауссово распределение. Оно занимает центральное место в теории и практике вероятностно-статистических исследований.

Термин "нормальное распределение" описывает семейство возможных частотных кривых, два типичных члена которого проиллюстрированы на рис. 2.5.1. Как видно из рисунка, кривые симметричны относительно прямой A'A. A отмечает уровень *i*, который является средним арифметическим переменной *x*, чье распределение описано кривой (1). Это также среднее арифметическое переменной, чье распределение описано кривой (2), которая по построению имеет то же самое среднее значение. Если бы кривая (2) имела более высокое среднее, она была бы существенно сдвинута вправо. μ и σ^2 - параметры кривой и определяют конкретного члена семейства нормальных распределений. Если переменная *x* (например, высота взрослых мужчин в выборке) имеет нормальное распределение со средним μ и вариацией σ^2, то мы говорим, что x имеет распределение $N(x;\ \mu,\ \sigma^2)$ (запись: $x \sim N(x;\ \mu,\ \sigma^2)$).

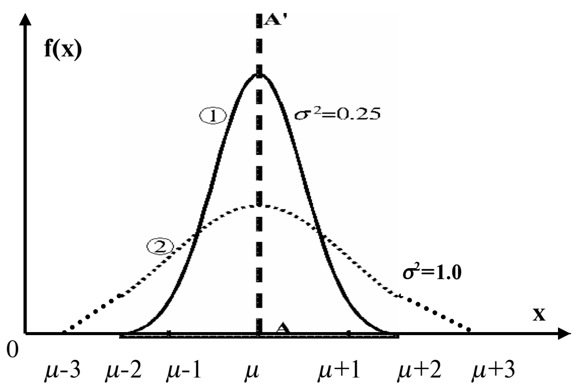

Рис. 2.5.1. Нормальное распределение

Очевидно, что распределение экономических количеств, как, например, доход, не может быть описано нормальной кривой. Типичные распределения доходов асимметричны с длинным правосторонним концом. Существует ли простое теоретическое распределение, которое бы отражало эту особенность?

В качестве такого распределения может быть предложено логнормальное распределение. Предположим, что мы рассматриваем распределение переменной *y* (дохода) и находим, что логарифм *y* имеет нормальное распределение, тогда говорят, что *y* (доход) логнормально распределен.

Определение. Случайная величина *y* имеет логарифмически-нормальное распределение с параметрами μ и σ, если ее логарифм ($x = \ln y$) имеет нормальное распределение с теми же параметрами μ и σ. Нередко логнормальное распределение обозначают $\Lambda(y;\ \mu,\ \sigma^2)$

Два представителя логнормального семейства проиллюстрированы на рис. 2.5.2. Обратим внимание, что, в отличие от нормального распределения, логнормальное распределение не определяется для отрицательных величин переменной *y*.

Логнормальное распределение имеет следующую функцию плотности распределения

$$f(y) = \Lambda(y;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\exp^{-1/2\left[(\ln y-\mu)/\sigma\right]^2} \quad \text{для } y>0.$$

Как показано на рис. 2.5.2 кривые функции *f*(y) имеют правостороннюю асимметрию, которая тем сильнее, чем больше значения параметров μ и σ.

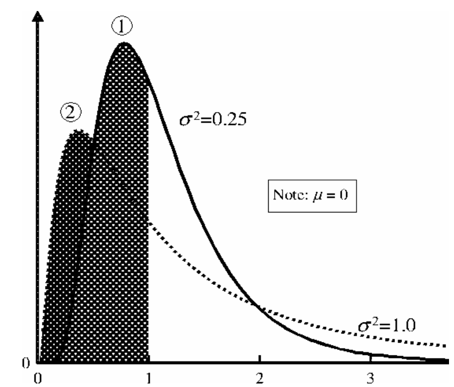

Рис. 2.5.2. График функции плотности логарифмически-нормального распределения

Можно выделить несколько удобных свойств логнормального распределения: 1) простая связь с нормальным распределением; 2) симметричная кривая Лоренца; 3) непересекающиеся кривые Лоренца; 4) инвариантность к логлинейным трансформациям.

Первое свойство уже было рассмотрено выше. Тем не менее, имеет смысл отметить, что это простое преобразование позволяет очень легко найти совокупную частоту $F(y)$, соответствующую доходу y (пропорция населения с доходом не больше y):

- Находим логарифм y (который обозначим x);
- Стандартизируем это число, используя два параметра, вычисляем $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$;
- Находим $F(z)$ в таблицах стандартного нормального распределения.

Второе свойство логнормального распределения проиллюстрировано на рис. 2.5.3: кривые Лоренца симметричны относительно линии CP, где P - точка на типичной кривой Лоренца, в которой у достигает своего среднего значения. Это позволяет оценить существует ли на первый взгляд возможность для использования логнормали для аппроксимации некоторого набора данных. Если нарисованная кривая Лоренца не выглядит симметричной, тогда, весьма вероятно, что предположение логнормальности окажется не удовлетворенным.

Третье свойство можно также увидеть на рис. 2.5.3. Важный вывод, который можно сделать: *из двух любых членов семейства логнормальных распределений, один однозначно демонстрирует большее неравенство, чем другой.* Это замечание полезно для сравнения неравенства, представленного двумя распределениями дохода.

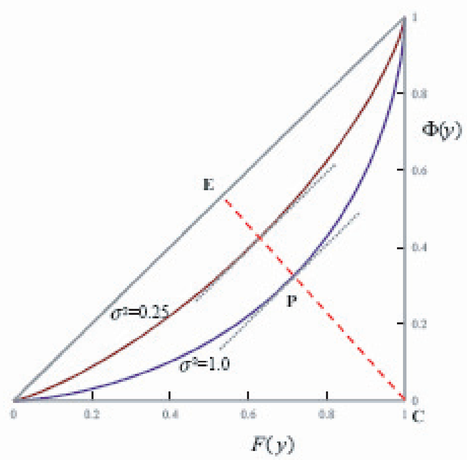

Рис. 2.5.3. Кривая Лоренца для логарифмически-нормального распределения

Последний пункт (инвариантность к логлинейным трансформациям) вытекает из хорошо известного свойства нормального распределения: если переменная $x \sim N(x;\ \mu,\ \sigma^2)$, то простая трансформация $z = a + bx \sim N(z;\ a + b\mu,\ b^2\sigma^2)$.

Рассмотрим, какое отношение все вышесказанное имеет к логнормальному распределению. Пусть переменная $y \sim \Lambda(y;\ \mu,\ \sigma^2)$ и переменная $x = log(y) \sim N(x;\ \mu,\ \sigma^2)$. Предположим, что мы рассматриваем любые два числа A и b. При этом А положительно, обозначим $a = ln(A)$. Используем эти два числа для того, чтобы трансформировать y в переменную w таким образом:

$$w = Ay^b$$

Тогда $log(w) = a + b\ log(y)$.

Обозначим $log(w) = z$ и вспомним, что log(y)=x. Тогда последнее уравнение может быть записано $z = a + bx$.

Так как $x \sim N(x;\ \mu,\ \sigma^2)$, то $z \sim N(z;\ a + b\mu,\ b^2\sigma^2)$. Другими словами логарифм w имеет нормальное распределение со средним $a + b\mu$ и вариацией $b^2\sigma^2$. Тогда w имеет логнормальное распределение $\Lambda(w;\ a + b\mu,\ b^2\sigma^2)$.

Исследования в области моделирования заработной платы и доходов населения стали широко проводиться в России (а раньше СССР) с конца 50-х годов. Они явились продолжением работ, начатых еще в 20-30 годы советскими статистиками и экономистами. В начале 80-х годов были созданы достаточно надежные методы оценки и прогнозов распределения заработной платы и доходов. Они основывались на использовании логарифмически нормальной функции. Так, работа Н.Рабкиной и Н.Римашевской "Основы дифференциации заработной платы и доходов населения" (1972) [21] представляет собой результаты многолетних исследований, проведенных авторами на большом фактическом материале.

Переход к рынку, сопровождающийся значительным ростом дифференциации доходов, у ряда специалистов вызвал сомнения в возможности применения логарифмически-нормальной функции для описания формы распределения домохозяйств по доходам в России, часто высказываются предположения о бимодальности распределения доходов.

Однако исследователи ИСЭПН РАН для 95-99% населения не видят основания пока менять аппроксимирующую функцию, она остается логарифмически нормальной [22]. При этом ряды распределения по данным бюджетного обследования, напротив, приобрели "классический вид логнормальной кривой с правосторонней скошенностью". Что же касается доходов всего населения, то в данном случае необходимы конструктивные расчеты.

Распределение Парето

Из класса аппроксимирующих моделей, применяющихся к распределению доходов, кроме логарифмически нормальной модели, следует отметить распределение Парето.

Итальянский экономист В.Парето (Pareto, 1965) [23] рассматривал распределение дохода налогоплательщиков. Поскольку часть населения налогов не платит (ввиду того, что их доход не превышает установленного для налогообложения значения), Парето имел дело лишь с теми значениями, которые превышают этот порог, обозначим его $\underline{y}$. Позднее такие распределения назвали усеченными. Парето обнаружил, что закон распределения высоких доходов описывается формулами:

$$F(y) = \prod(y; \underline{y}, \alpha) = 1 - \left(\frac{\underline{y}}{y}\right)^{\alpha}$$

$$f(y) = \frac{\alpha}{\underline{y}}\left(\frac{\underline{y}}{y}\right)^{\alpha+1},$$

где $y > \underline{y}$, $\alpha > 0$, $\underline{y} > 0$.

Функция плотности имеет вид монотонно убывающей кривой, выходящей из точки ($\underline{y}$, $\alpha/\underline{y}$) (рис. 2.5.4). Параметр α характеризует "крутизну" и может трактоваться как своего рода показатель дифференциации.

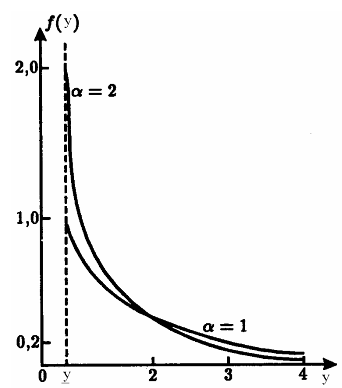

Рис. 2.5.4. График функции плотности распределения Парето

Другие функциональные формы

Как уже отмечалось выше, в настоящее время многие авторы активно критикуют использование логнормального распределения для описания формы распределения домохозяйств по доходам в России. Кроме логнормального и Парето для анализа распределения дохода могут быть использованы многие другие функциональные формы [24].

Рассмотрим сначала формы, имеющие отношение к распределению Парето. Функция распределения общей формы, известной как *тип III распределения Парето,* может быть записана как

$$F(y) = 1 - e^{-ky}[\gamma + \delta y]^{-\alpha},$$

где k, $\gamma \geqslant 0$ и $\alpha, \delta > 0$. Полагая $k = 0$ в вышеуказанном уравнении, мы получаем распределение *Парето II типа.* Полагая $\gamma = 0$ и $\delta = 1/\underline{y}$ в распределении Парето типа II, мы получаем распределение Парето типа I: Π ($\underline{y}$; y, α).

Сингх и Маддала (Singh & Maddala, 1976) предложили следующую полезную функциональную форму:

$$F(y) = 1 - [\gamma + \delta y^{\beta}]^{\alpha},$$

где α, β, γ, δ - параметры, такие, что $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$, $F'(y) = f(y) \geqslant 0$. Из этого распределения можно получить следующие частные случаи.

1. При $\beta = 1$, имеем распределение Парето типа II.

2. При $\gamma = 1$, $\delta = [1/\alpha]k^{\beta}$ и $\alpha \to \infty$, получаем *распределение Вейбулла*:

$$F(y) = 1 - \exp(-[ky]^{\beta})$$

r-ый нулевой момент дается формулой

$$\mu_r' = k^{-r}\Gamma(1 + r/\beta),$$

где $\Gamma(.)$ - гамма функция, определенная $\Gamma(x) = \int uxe^{-u}du$

3. Частным случаем распределения Вейбулла при $\beta = 1$ является *экспоненциальное распределение* $F(y) = 1 - \exp(-ky)$. Моменты находятся следующим образом

$$\mu_r' = k^{-r}\Gamma(1 + r)$$

4. Если $\alpha = \gamma = 1$ и $\delta = \underline{y}^{-\beta}$, тогда мы имеем $sech^2$-распределение Фиска (Fisk, 1961)

$$F(y) = 1 - \left[1 + \left[\frac{y}{\underline{y}}\right]^{\beta}\right]^{-1},$$

где r-ый нулевой момент

$$\mu_r' = r\underline{y}^{r}\frac{\pi}{\beta\sin\left(\frac{r\pi}{\beta}\right)} \quad -\beta < r < \beta.$$

Более того, *sech²-распределение* является частным случаем распределения *Чамперноуна* (Champernowne, 1953):

$$F(y)=1-\frac{1}{\theta}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+[y/\underline{y}]^{\beta}}\right),$$

где θ - параметр, лежащий между $-\pi$ и π.

Распределение Юла (Yule) имеет функцию плотности

$$f(y)=AB_{v}(y,\rho+1)\ ,$$

где $B_{v}(y,\rho+1)$ - неполная Бета функция $\int_0^v u^{y-1}[1-u]^{\rho}\,du$, $\rho>0$ и $0<\nu\leqslant 1$.

Теперь обратимся к богатому семейству распределений, два члена которого были использованы в некоторой мере в исследовании распределения дохода - кривые Пирсона. Распределения Пирсона типа I это *Бета распределение* с функцией плотности:

$$f(y)=\frac{y^{\xi}[1-y]^{\eta}}{B(\xi,\eta)}\ ,$$

где $0<y<1$, и $\xi,\eta>0$.

r-ый нулевой момент может быть записан

$$B(\xi+r,\eta)/B(\xi,\eta)$$

или

$$\Gamma(\xi+r)\Gamma(\xi+\eta)/[\Gamma(\xi)\Gamma(\xi+\eta+r)].$$

Гамма распределение - это тип III семейства Пирсона:

$$f(y)=\frac{\lambda^{\phi}}{\Gamma(\phi)}y^{\phi-1}e^{-\lambda y}\ \text{, где } \lambda,\varphi>0.$$

Моменты: $\mu_r'=\lambda^{-r}\dfrac{\Gamma(\phi+\lambda)}{\Gamma(\phi)}$

Рассмотрим следующие три интересных свойства Гамма функции.

Первое, при $\varphi=1$ получаем частный случай - экспоненциальное распределение. Второе, предположим, что $\lambda=1$ и y имеет Гамма распределение с $\varphi=\varphi_1$, в то время как w имеет Гамма распределение с $\varphi=\varphi_2$. Тогда сумма $w+y$ так же имеет Гамма распределение с $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. Третье, Бета-распределение с большим параметром очень похоже на Гамма распределение с большими значениями параметров λ, φ. Это видно из формулы для моментов. Для больших значений x и константы k - это есть случай $\Gamma(x)/\Gamma(x+k)\cong x^{-k}$. Отсюда моменты Бета-распределения стремятся к $[\xi+\eta]^{-r}\,\Gamma(\xi+r)/\Gamma(\xi)$.

На рис. 2.5.5 изображены взаимосвязи между различными функциональными формами. Твердые стрелки указывают, что одно распределение является частным случаем другого. Пунктирные линии указывают, что для больших величин переменной дохода или известных величин параметра одно распределение аппроксимирует другое.

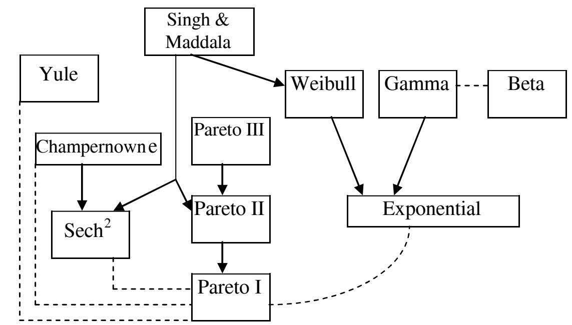

Рис. 2.5.5. Взаимосвязи между функциональными формами

Источник: Cowell F. Measuring Inequality. - Oxford University Press, 2000

Другой подход для анализа распределения населения по доходам предлагает использовать более сложные модели для функции плотности распределения по доходам, представляющие собой некоторую смесь распределений. Этот метод был хорошо описан в статистической литературе [25, 26]. И применен на практике, например, А.Баккером и Д.Гриди (Bakker & Creedy, 1999), которые рассматривали смесь гамма и экспоненциального, логнормального и экспоненциального распределений для аппроксимации дохода в Новой Зеландии [27]. Е.Флачаир и О.Нунез (Flachaire & Nunez, 2002) использовали смесь логнормальных распределений [28].

Вышеуказанный подход нашел применение и для российской экономики. С.Айвазян (1997) [29] отмечает, что в условиях переходного периода существование значительной доли скрытых доходов и практической невозможности получения достоверных статистических данных обусловливает необходимость экспертно-статистического подхода и целесообразность рассмотрения пятикомпонентной смеси логарифмически-нормальных моделей для описания реального распределения населения по доходам. Т.е. предлагается рассматривать модель

$$f(y)=\sum_{j=1}^{k}q_i\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j y}e^{-\frac{(\ln y-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}\ ,$$

где k - общее число страт, на которые разбивается население (было предложено пять страт),

q_j - удельный вес населения j-ой страты во всем обществе,

а распределение населения j-ой страты по величине среднедушевого дохода описывается логарифмически нормальной плотностью вида

$$f_j(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j y} e^{-\frac{(\ln y - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

Полученные С.Айвазяном оценки характеристики расслоения населения России по доходам значительно отличаются от официальных значений тех же характеристик. Так соотношение доходов 10% -ых групп наиболее и наименее обеспеченного населения было равно 22,8 раз в 1996 г. согласно расчетам автора и 13 раз согласно официальной статистике.

Г.Деев (1995) [30] предлагает использовать смесь бета-распределений. Главное преимущество бета-распределения в том, что оно не имеет бесконечных хвостов и сосредоточено на конечном интервале. Использование бета-распределения заставляет четко определить размах распределения доходов, указать минимальное y_{min} и максимальное y_{max} значение доходов. При этом, так как по мнению Г.Деева распределение населения по доходам в России бимодально, достаточно рассмотреть двухкомпонентную смесь бета-распределений.

А.Суворов и Е.Ульянова (1997) [31] предлагают разбивать население на две группы. Первая включает тех, кто имеет явные доходы (тех, кто обследуется в бюджетной статистике), вторая - тех, кто имеет скрытые доходы. Авторы предлагают исходить из того, что выборочные обследования бюджетов домохозяйств, хотя и не позволяют правильно оценить средний уровень доходов населения, правильно определяют модальный уровень дохода, т.е. дохода, в котором плотность распределения достигает максимального значения. Результаты расчетов, проведенных А.Суворовым и Е.Ульяновой, существенно отличаются от официальной статистики. Так, коэффициент фондов составил 26 раз в 1995 г. и 62 раза в 1996 г., в то время как согласно оценкам Росстата коэффициент фондов был равен 13,5 и 13 соответственно.

Иной метод моделирования распределения доходов разработали А.Кирута и А.Шевяков (1999) [32]. Авторы полагают, что предположение о том, что распределение в России по денежным доходам на душу подчинено логнормальному закону, приводит к "грубому обрезанию левого и правого "хвостов" истинного распределения населения по доходам". Основная идея предложенного исследователями метода заключается в перевзвешивании данных выборочных бюджетных обследований населения и балансировки их с макроэкономическими данными о доходах на основе формирования децильных групп населения в регионах. При этом учитываются межрегиональные дефляторы цен и доля населения региона в общей численности населения страны.

Глава 3
НЕРАВЕНСТВО ДОХОДОВ В ПЕРЕХОДНОЙ ЭКОНОМИКЕ РОССИИ

3.1. Тенденции изменения неравенства доходов

Особенности дифференциации заработной платы и доходов в бывшем СССР

В советский период в условиях административной системы управления экономикой основным направлением социальной политики государства являлось поддержание относительно низкого, но достаточно стабильного уровня жизни для подавляющей массы населения. Это достигалось, с одной стороны, жестким нормированием заработной платы и других видов доходов населения, а, с другой стороны, - путем "замораживания" цен на основные виды товаров народного потребления и платных услуг. Большую роль в реализации этой политики, как известно, играли общественные фонды потребления (ОФП), которые занимали более 30% в совокупных доходах населения и росли более быстрыми темпами по сравнению с заработной платой. При этом около 75% общей величины ОФП формировались и расходовались централизованно, а остальные 25% - за счет средств предприятий на основе жестких директивно задаваемых нормативов. Сложившаяся на такой основе система распределительных отношений строилась по существу на отрицании товарной формы оценки рабочей силы и была направлена на снижение дифференциации доходов трудящихся.

Формирование доходов базировалось на централизованном распределении и перераспределении денежных средств, благ и бесплатных услуг в соответствии с установленными правилами и нормами. Все определялось "наверху" и "сверху вниз". Это относится ко всем главным параметрам: соотношению потребляемой и накопляемой части в национальном доходе; соотношению оплаты труда и общественных фондов в расширенном потреблении; структуре общественных фондов потребления; дифференциации оплаты труда и дифференциации доходов населения.

Основную роль в структуре доходов населения играли трудовые доходы, как вознаграждение за обязательный труд, уровень и условия